24. 一般化サレタ Flow ニ就イテ.

松下真一（九大）

（1）

測度空間（Ω, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{m}$）ノ上デ定義サレタ保測変換ノ group トシテノ（普通ノ意味ノ）Flow ニ対シテハ，ソノ ergodic parts ヘノ分解問題ハ J. v Neumann, Kryloff-Bogoliou-bogoff ナドニヨッテ為サレ，測度空間ノカハリニ Boole 代数ノ上デノ同ジ事ヲ河田－岩村氏ガ研究サレタ事ガアル。

然シ此処デハ Boole 代数ノ上ノ変換ノツクル Semi-group ニマデ拡張シテ考ヘルハスルト Birkhoff ガ注意シタ様ニ Markoff process ガツクル semi-group ノ特殊ナ場合トナリ，Yosida-Kakutani 或ヘ Doeblin ナドノ得タ結果ニ相当スルモノガ得ラレルノデアル。

（2）

先ヅ σ－完備ナ Boole 代数 $\mathfrak{A}$ トソノ上デ定義サレタ join-homomorphisnm ノツクル semi-group $\mathfrak{S}$ トガアリ，且ツ $\sigma \in \mathfrak{S}$ ニ対シ，$a \in \mathfrak{A}$ ガ

$$a \longrightarrow a^{\sigma} \in \mathfrak{A}$$

ナル如ク対応ヅケラレテヰルトキ，$a, b \in \mathfrak{A}$ ニ対シ

$$(a, b)^{\sigma} \subset a^{\sigma}, b^{\sigma}.$$

$$0^{\sigma} = 0 \text{，而モ } a^{\sigma} = 0 \text{ ナラバ } a = 0$$

$$(a^{\sigma})' \subset (a')^{\sigma} \text{ ；但シ } a' \text{ ハ } a \text{ ノ complement}$$

ヲ満足スルモノトスル。カヽル $\mathfrak{S}$ ヲ $\mathfrak{A}$ ノ上ノ（一般化サレタ意味

デノ）Flow ト云フ。特ニSガ group ヲ為ス場合ヲ狭義ノFlow ト云フ。

サテ$\mathfrak{A}$ノSニヨル核心、即チ総テノ$\sigma \in S$ニ対シ $a^{\sigma}=a$ ナル如キ$\mathfrak{A}$ノ要素ノ全体ヲ$\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}$、又（Sガ unit ヲ有スルトキハ unit デナイ）総テノ$\sigma \in S$ニ対シテ $a^{\sigma} \subset a$ ナル如キaノ全体ヲ$\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}$トスレバ、明ラカニ

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_{\mathfrak{J}} \supset \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}$$

デアル。今$\mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}$ノ要素ニシテ $x \subset a$、且ツ $x \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{J}} - \mathfrak{A}_{\mathfrak{I}}$ ナル如キxノ存在シナイ様ナaノ全体ヲ$\mathfrak{B}$トスレバ、

Lemma 1　$\mathfrak{B}$ハ generalized Boolean algebra デアル。又$\mathfrak{A}$及ビ$\mathfrak{B}$ノ maximal ideal 全体ノ集合ヲ夫々 [$\mathfrak{A}$]、[$\mathfrak{B}$] ト書クコトニスル。猶以下ニ於テハ$\mathfrak{B}$ガ Boolean algebra ヲ為ス場合ヲ考ヘ、ソノ unit ヲ $E_{\mathfrak{B}}$トシヨウ。

Lemma 2. [$\mathfrak{A}$] ノ要素ハ少クトモ一ツ [$\mathfrak{B}$] ノ要素ヲ含ミ、若シソレガ$\mathfrak{B}$全体ヲ含ムノデナケレバ、ソレハ [$\mathfrak{B}$] ノ要素ヲ唯一ツシカ含マナイ。

其処デ [$\mathfrak{A}$] ノ要素デ$\mathfrak{B}$全体ヲ含ムモノノ総テヲ $[\mathfrak{A}]_{\mathfrak{D}}$ トシ、サウデナイモノノ全体ヲ $[\mathfrak{A}]_{\mathfrak{E}}$ トスレバ Lemma 2ヨリ $[\mathfrak{A}]_{\mathfrak{E}}$ ハソレガ含ム [$\mathfrak{B}$] ノ要素ニヨリ

$$[\mathfrak{A}]_{\mathfrak{E}} = \sum_{u \in [\mathfrak{B}]}^{\oplus} [\mathfrak{A}]_u$$

ナル如ク直和ニ分解サレル。(*)

(3)

サテ近藤教授ノ作用素環ノ可約性ニ関スル論文(**)ノ方法ト analogy ニ次ノ様ニ考ヘテユク。即チ $x \in \mathfrak{A}$ ナルトキ、xヲ含マナイ [$\mathfrak{A}$] ノ要素ノ全体ヲ [x] ト書イテカカル [x] ノ全体ヲ $\tilde{\mathfrak{A}}$ トスレバ、$\tilde{\mathfrak{A}}$ ハ$\mathfrak{A}$ノ representation ヲナス。サテ

$$[x+y]=[x]\vee[y] \qquad [x\cdot y]=[x]\wedge[y]$$

$$[0]=0,\quad [E]=[\mathfrak{A}],$$ 但シEハ$\mathfrak{A}$ノ unit デアル。

又 $[\mathfrak{A}] - [x] = [x]'$ ト定義スレバ．容易ニ解ル如ク

$$[x'] \subset [x]'$$

猶 $x \subset y$ ナラバ $[x] \subset [y]$ 且ツ $[a] = 0$ ナラバ $a = 0$ デアル。ソコデ

Lemma 3 $\quad [x]=[y] \Longleftrightarrow x=y$

$[\mathfrak{A}]$ ノ分解ニ対応シテ $\tilde{\mathfrak{A}}$ ノ要素モ亦直和ニ合シ

$$\begin{cases}[x]=[x]_D+[x]_E & \text{且ツ}\\ [x]_E=\sum\limits^{\oplus}_{\iota\in[B]}[x]_\iota & \end{cases}$$

但シ $[x]$ ノ分解ノ各項ノ中ニハ勿論0ニナルモノモアル。$[x]_D\ (x\in\mathfrak{A})$ ノ全体ヲ $\tilde{\mathfrak{A}}_D$，$[x]_\iota$ ノ全体ヲ $\tilde{\mathfrak{A}}_\iota$ トスレバ：ソレラハ $\tilde{\mathfrak{A}}$ ニ含マレル Boole 代数デアル。此処ニ於テ $[x^\sigma] = U^\sigma[x]$，$U^\sigma[x]_* = U^\sigma_*[x]_*$（但シ＊ハ文字 D．E．及ビ $\iota\in[B]$ ヲ代表スル）ト定義スレバ．U^σ ハ S ヨリ induce サレタ $\tilde{\mathfrak{A}}$ ノ上ノ isomorphism デ．$[\mathfrak{A}]$ ノ分解ニ対応シテ

$$\begin{cases} U^\sigma = U^\sigma_D + U^\sigma_E, & U^\sigma_E=\sum\limits^{\oplus}_{\iota\in[B]} U^\sigma_\iota \quad (\sigma\in S)\\ U^\sigma_\iota\cdot U^\rho_\mu = U^\rho_\mu\cdot U^\sigma_\iota = 0, & U^\rho_D\cdot U^\sigma_\iota = 0 \quad (\sigma,\rho\in S,\ \mu\neq\iota)\end{cases}$$

ガ成立スル。

Definition；Boole代数 $\mathfrak{A}$ トソノ上ノ Flow S ガアル場合．総テノ $\sigma\in S$ ニ対シ $a^\sigma\subset a$ ナル如キ要素ガ $\mathfrak{A}$ ノ unit 及ビ0以外ニ存シナイトキ．S ハ $\mathfrak{A}$ ノ上デ ergodic デアルト云フ。勿論 S ガ $\mathfrak{A}$ ノ上デ ergodic ナラバ．E ヲ $\mathfrak{A}$ ノ unit トスルトキ．$E^\sigma=E$ 且ツ $O^\sigma=O$ $(\sigma\in S)$ ガ成立シテ来ル。

Theorem 1. 任意ノ $\iota\in[B]$ ニ対シ U^σ_ι $(\sigma\in S)$ ノ全体ハ $\tilde{\mathfrak{A}}_\iota$ ノ上ノ Flow トナリ．且ツ其処デ ergodic デアル。又 U^σ_D ハソレガ ergodic トナル様ナ如何ナル Boole 代数ヲモ許サナイ。

コノ theorem ノ証明ノタメニ次ノ Remark ヲ記シテ置ク。E_B 及ビ E'_B ノ $\mathfrak{A}$ ニ於ケル principal ideal ヲ夫々 $\mathfrak{J}(E_B)$，$\mathfrak{J}(E'_B)$

トスレバ、明ラカニ、

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{p}(E_B) \vee \mathfrak{p}(E'_B)$$

デ且ツ $x \in \mathfrak{G}$, $x \wedge \mathfrak{p}(E_B) = x_\mathcal{E}$, $x \wedge \mathfrak{p}(E'_B) = x_\mathcal{D}$ トスレバ $[x_\mathcal{E}]_\mathcal{D} = [x_\mathcal{D}]_\mathcal{E} = 0$ デアルカラ. $[x] = [x_\mathcal{D}]_\mathcal{D} \oplus [x_\mathcal{E}]_\mathcal{E}$ トナリ $\mathrm{U}^\sigma_\mathcal{E}[x]_\mathcal{E} = \mathrm{U}^\sigma_\mathcal{E}[x_\mathcal{E}]_\mathcal{E} \in [x_\mathcal{E}]_\mathcal{E} = [x]_\mathcal{E}$ デアル。

(4)

次ニSトシテ σ ナル唯一ツノ元ヨリ生成サレル cyclic semi-group S_0 ヲトラウ。コノ場合ハ丁度 Markoff process ニ当ルワケデアル。スルト

Theorem 2.

i) 総テノ $a \in \widetilde{\mathfrak{G}}_\mathcal{D}$ ニ対シ、ソレガ適当ニ直和 $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$) ニ分解サレテ. 如何ナル $\sigma \in S_0$ ニ対シテモ $\alpha_1 \cap \mathrm{U}^\sigma_\mathcal{D} \alpha_2 = 0$ デアル。

ii) 総テノ $\alpha \in \widetilde{\mathfrak{G}}_\mathcal{E}$ ニ対シ、如何ナル直和分解 $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ ($\alpha_1, \alpha_2 > 0$) ニ対シテモ適当ナル $\sigma \in S_0$ ガ存在シテ $\alpha_1 \cap \mathrm{U}^\sigma_\mathcal{E} \alpha_2 > 0$ トナル。

(但シ以上ニ於ケル notation > ハ ⊃ 且ツ キナルコトヲ示ス。)

又特ニSガ group G デアル場合、$X \subset \mathfrak{G}$ ニ対シテ $X^\sigma = E_{x\sigma}(x^\sigma | x \in X)$ ト定義スレバ $\mathrm{U}^\sigma[x] = [x]^\sigma$ トナリ、U^σ ハ実際ニ各要素ノSニヨル変換ト一致シテ来ル．コノ場合 Definition ノ中ノ $a^\sigma \subset a$ ナル條件ハ $a^\sigma = a$ トナル。ソレハ各 $\sigma \in G$ ニ対シテ σ ノ inverse ガ存在スルカラデアリ、従ッテコノ場合ニ $[\mathfrak{G}]_\mathcal{D}$ ハ存在シナイ。

[註]

* $[\mathfrak{G}]_\mathcal{D}$ ヲ $[\mathfrak{G}]$ ノ dissipative part, $[\mathfrak{G}]_\mathcal{E}$ ヲ $[\mathfrak{G}]$ ノ ergodic part ト呼ブコトニショウ。

** M. Kondô ; Sur la réductibilité des anneaux des opérateurs, Proc. Imp. Vol. XX (1944).

(1947. I. 7 受付)